Chapitre 5

Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations

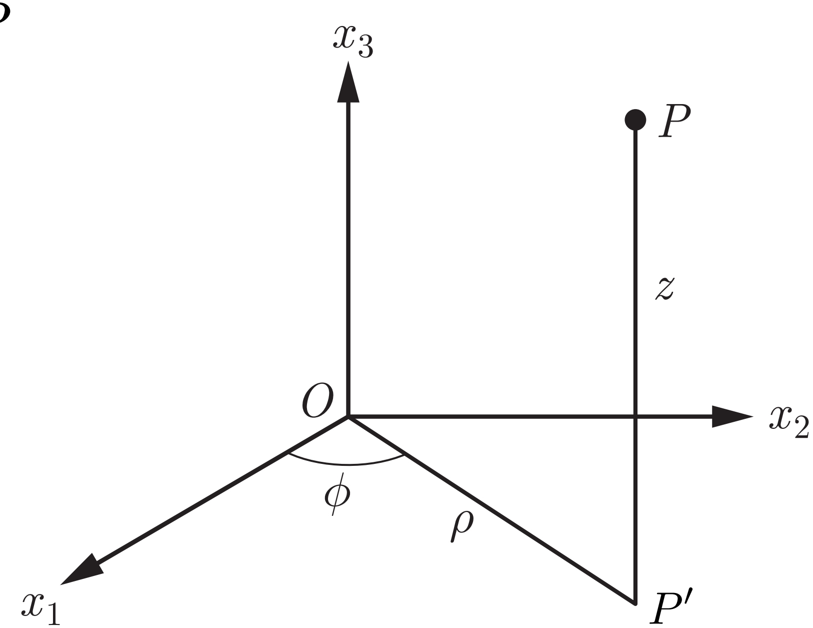
- Les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie cylindrique.

- **Coordonnées cartésiennes :** point P

$$P = (x_1, \, x_2, \, x_3)$$

- **Coordonnées cylindriques :** point P

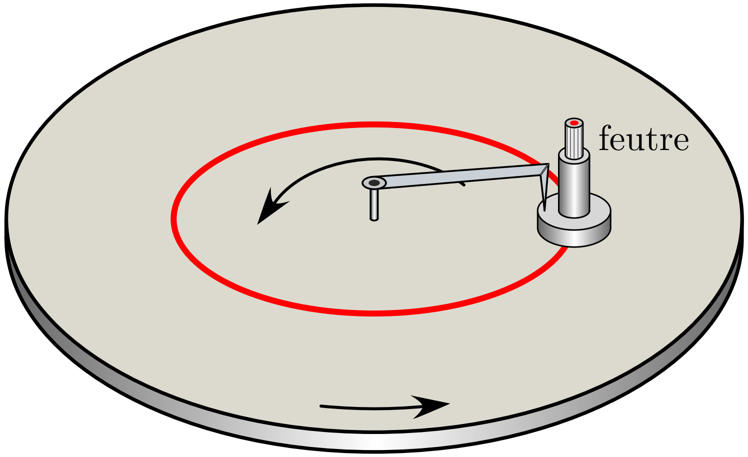
$$P = (\rho, \, \phi, \, z)$$

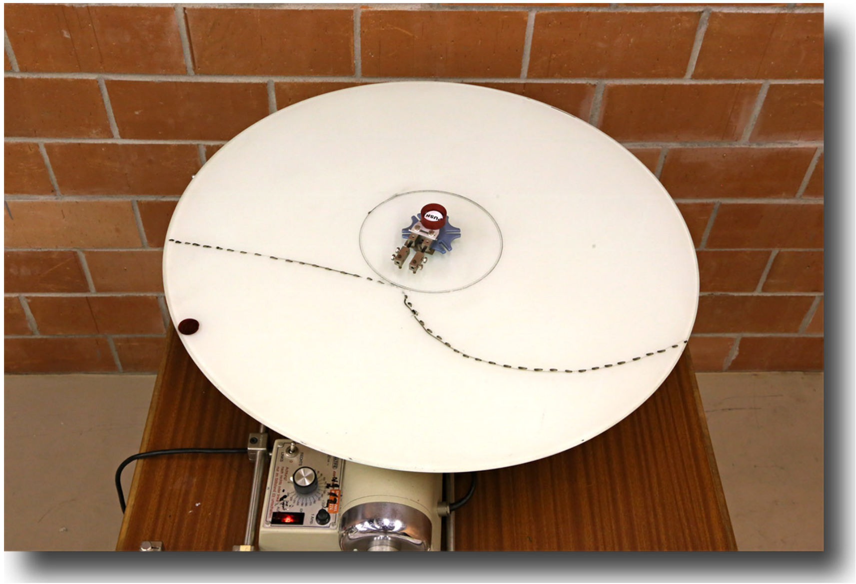


- **Lien géométrique :**

$$\begin{aligned} &1 \quad x_1 = \rho \cos\phi \\ &2 \quad x_2 = \rho \sin\phi \\ &3 \quad x_3 = z \end{aligned} \tag{5.1}$$

- **Coordonnées polaires :** coordonnées cylindriques dans le plan $z = 0$

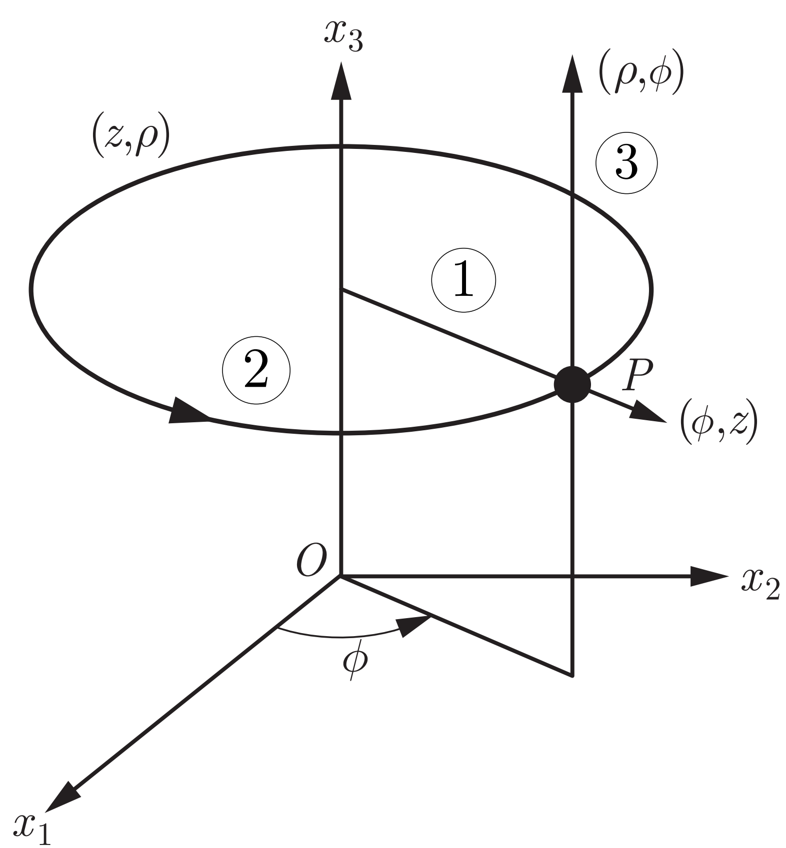




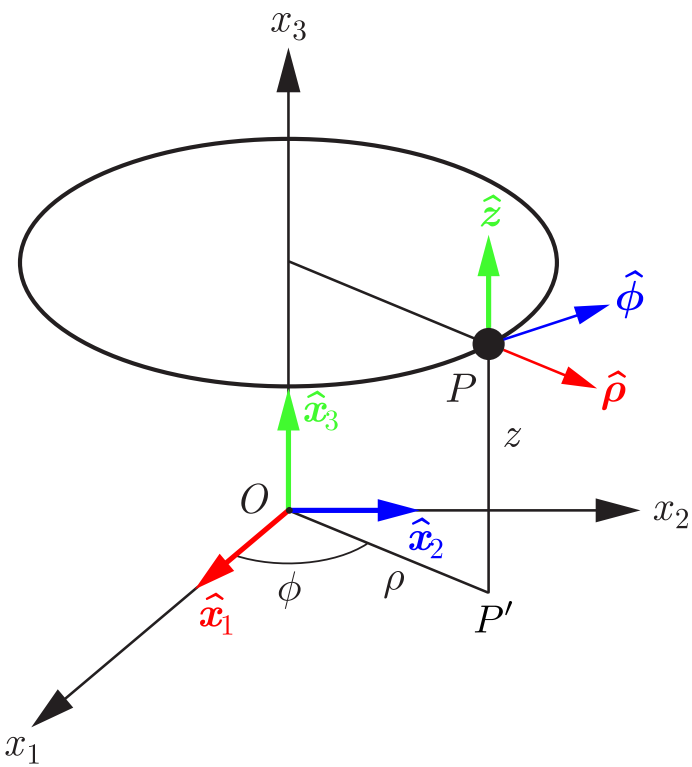
- Un feutre est fixé sur un porte-feutre qui tourne à vitesse constante par rapport au sol.
  1. On maintient le disque immobile et on relâche le porte-feutre qui a alors une trajectoire rectiligne par rapport au plateau.
  2. On fait tourner le disque à la même vitesse angulaire que le feutre et on relâche le porte-feutre qui a alors une trajectoire courbe par rapport au disque.
- Un tel système se prête naturellement à l'usage de coordonnées cylindriques pour exprimer de façon simple la trajectoire du feutre.

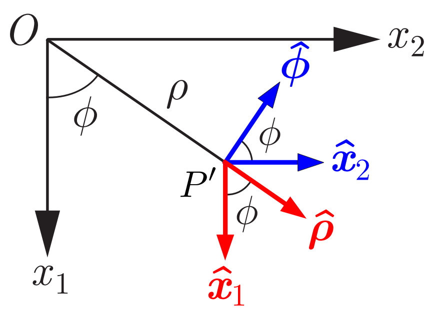
- **Lignes de coordonnées cylindriques :** lieu géométrique des points dont deux coordonnées cylindriques sont fixes (droite ou courbe) orienté dans le sens croissant de la coordonnée cylindrique variable.

  1. Demi-droite radiale horizon. : $\phi = \text{cste} \quad z = \text{cste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \rho < \infty$
  2. Cercle horizontal : $z = \text{cste} \quad \rho = \text{cste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$
  3. Droite verticale : $\rho = \text{cste} \quad \phi = \text{cste} \quad \text{et} \quad -\infty < z < \infty$



- **Repère cylindrique :** $\left(\hat{\boldsymbol{\rho}},\,\hat{\boldsymbol{\phi}},\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)$ repère mobile
- **Repère orthonormé :**
  1. $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 1$
  2. $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 \qquad (5.2)$
- **Repère direct :**
  1. $\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{z}}$
  2. $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad (5.3)$
  3. $\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- **Changement de base :**
  1. $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$
  2. $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \qquad (5.4)$
  3. $\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}}_3$



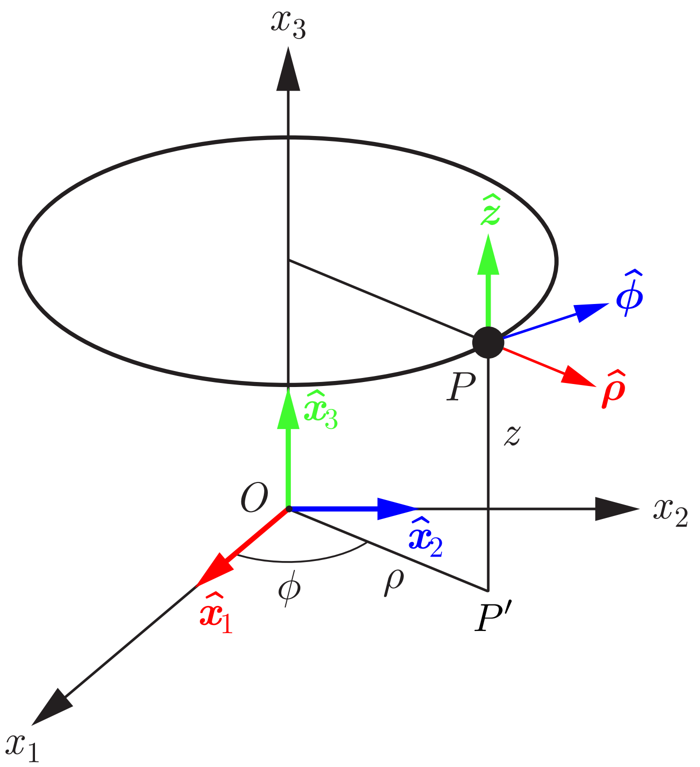


- **Vecteur position :** où $\hat{\boldsymbol{\rho}} \equiv \hat{\boldsymbol{\rho}}\,(\phi)$

$$\boldsymbol{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5.5}$$

- **Changement de base :**

$$\begin{aligned} &① \quad \hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ &② \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ &③ \quad \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{aligned} \tag{5.4}$$



- **Dérivées des vecteurs de base :**

$$\begin{aligned} &① \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\phi}\,(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2) = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &② \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\,(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2) = -\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ &③ \quad \dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.6}$$

- **Vecteur position :**

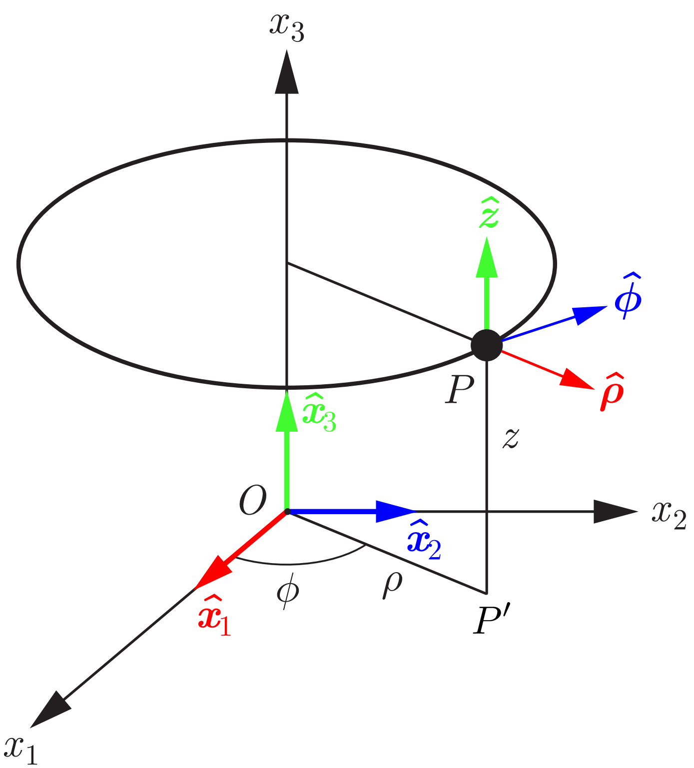
$$\boldsymbol{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5.5}$$

- **Dérivée du vecteur position :**

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}} + z\,\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} \tag{5.7}$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (5.6)
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{0}$



- **Vecteur vitesse :** (5.6) dans (5.7)

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}_{\text{radiale}} + \underbrace{\rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}_{\text{tangentielle}} + \underbrace{\dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}}_{\text{verticale}} \tag{5.8}$$

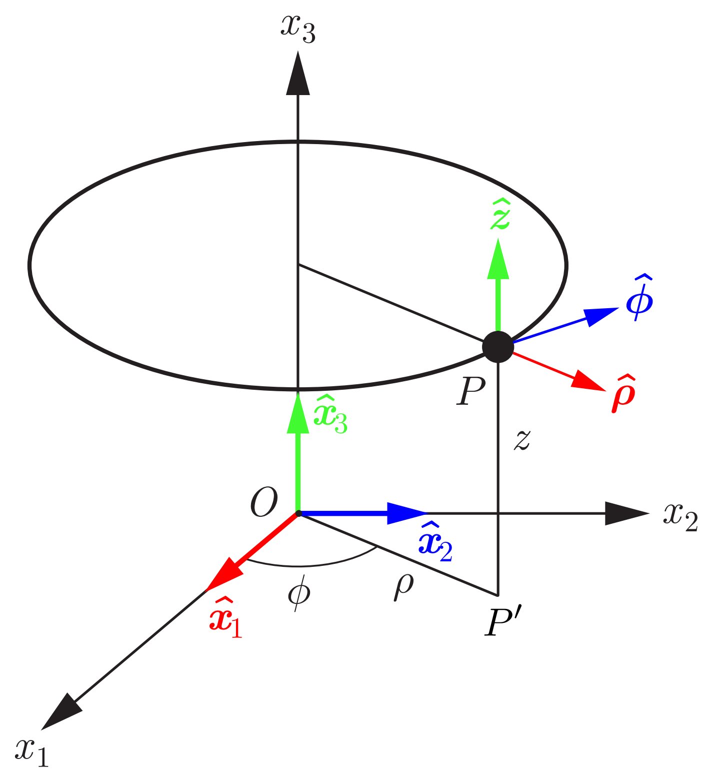
- **Vecteur vitesse :**

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5.8}$$

- **Dérivée du vecteur vitesse :**

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} = {} & \ddot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\rho}\,\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \left(\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\,\ddot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \rho\,\dot{\phi}\,\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}} + \dot{z}\,\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}\end{aligned} \tag{5.9}$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**
  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (5.6)
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{0}$



- **Vecteur accélération :** (5.6) dans (5.9)

$$\boldsymbol{a} = \Big(\underbrace{\ddot{\rho}}_{\text{radiale}}\ \underbrace{-\,\rho\,\dot{\phi}^2}_{\text{centripète}}\Big)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \Big(\underbrace{\rho\,\ddot{\phi}}_{\text{tangentielle}} + \underbrace{2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}}_{\text{de Coriolis}}\Big)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \underbrace{\ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}}_{\text{verticale}} \tag{5.10}$$

- Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie sphérique.

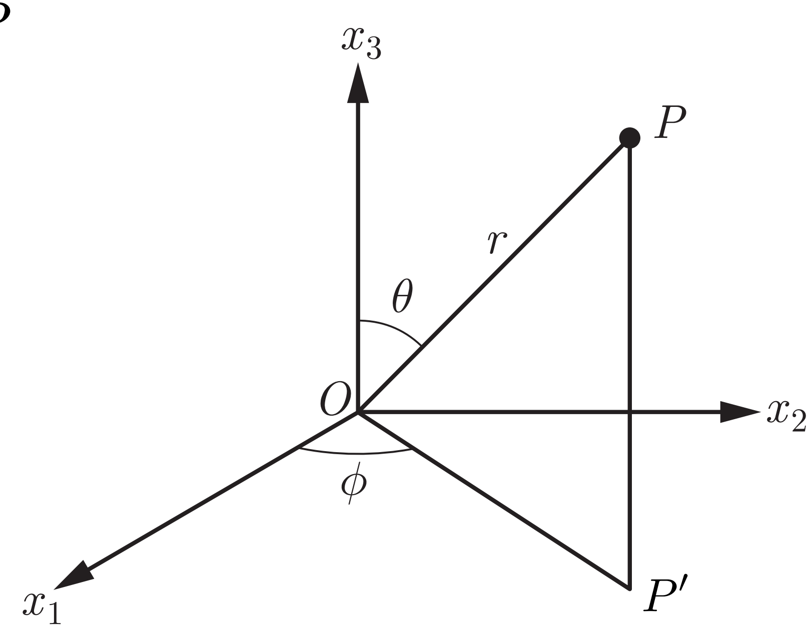
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

$$P = (x_1,\, x_2,\, x_3)$$

- **Coordonnées sphériques :** point P

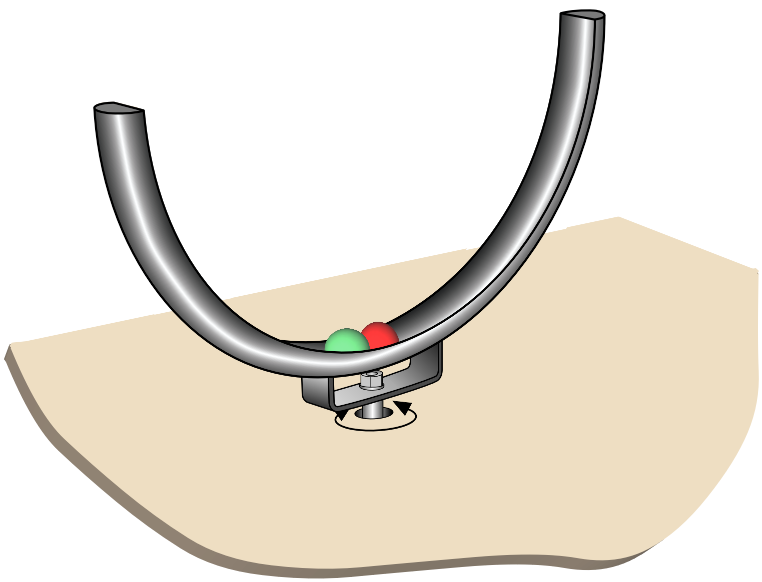
$$P = (r,\, \theta,\, \phi)$$

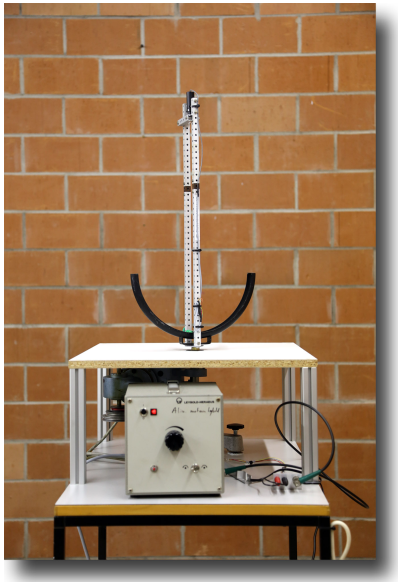
- **Lien géométrique :**



$$\begin{aligned} &x_1 = r \sin\theta \cos\phi \\ &x_2 = r \sin\theta \sin\phi \\ &x_3 = r \cos\theta \end{aligned} \tag{5.11}$$

- **Coordonnées polaires :** coordonnées sphériques dans le plan $\theta = \dfrac{\pi}{2}$





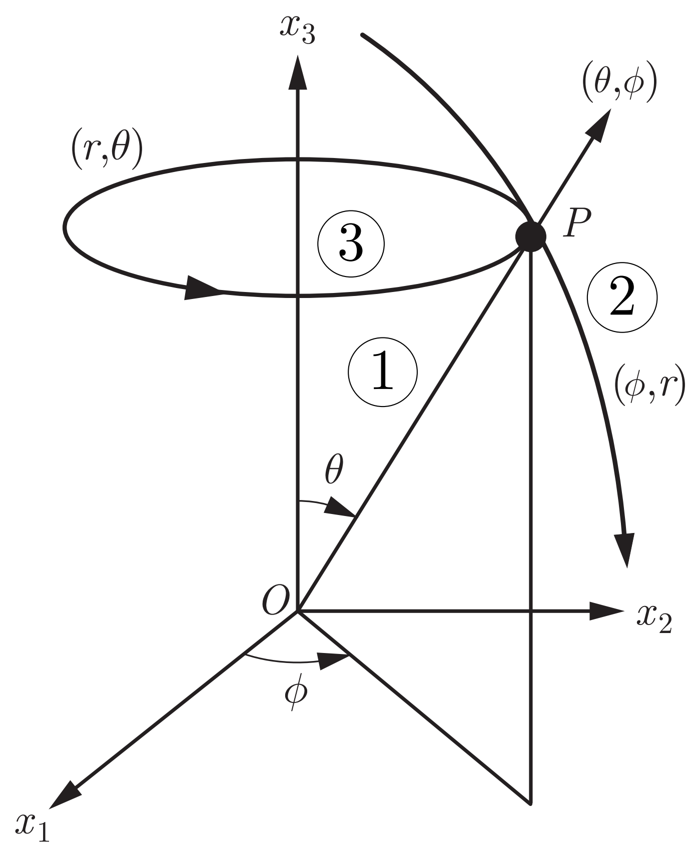
- Une bille peut glisser dans un anneau qui tourne à vitesse angulaire constante autour de l'axe vertical qui passe par son centre.

  1. Si la vitesse angulaire de rotation de l'anneau n'est pas suffisante, la bille reste au bas de l'anneau.
  2. Si la vitesse angulaire de rotation de l'anneau est suffisante, la bille remonte le long de l'anneau.

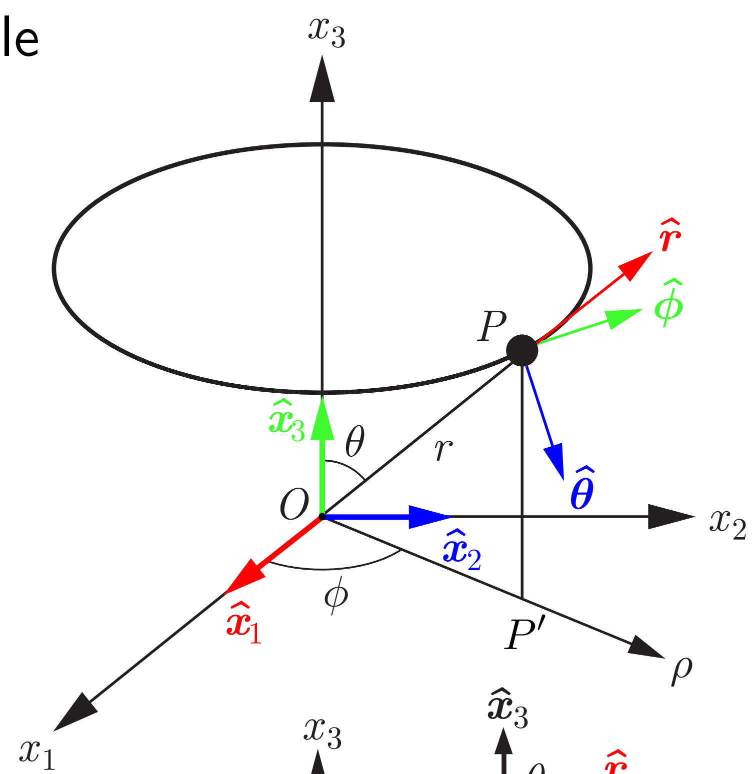
- Un tel système se prête naturellement à l'usage de coordonnées sphériques pour exprimer de façon simple la trajectoire de la bille.

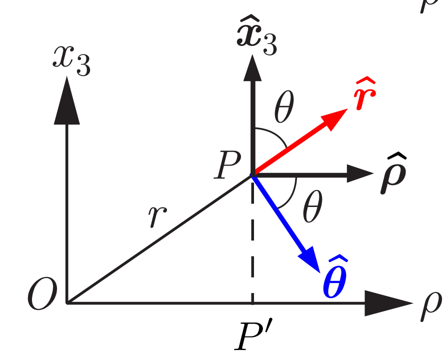
- **Lignes de coordonnées sphériques :** lieu géométrique des points dont deux coordonnées sphériques sont fixes (droite ou courbe) orienté dans le sens croissant de la coordonnée sphérique variable.

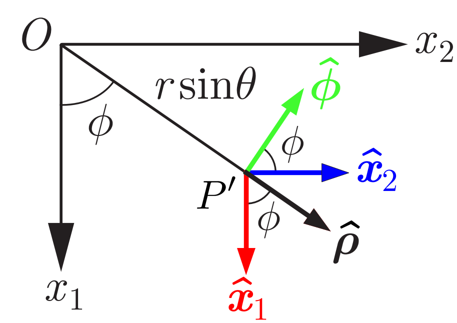
  1. Demi-droite radiale : $\theta = \text{cste} \quad \phi = \text{cste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < \infty$
  2. Demi-cercle vertical : $\phi = \text{cste} \quad r = \text{cste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
  3. Cercle horizontal : $r = \text{cste} \quad \theta = \text{cste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$



- **Repère sphérique :** $\left(\hat{\boldsymbol{r}},\, \hat{\boldsymbol{\theta}},\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ repère mobile
- **Repère orthonormé :**
  1. $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 1$
  2. $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 0$ (5.12)
- **Repère direct :**
  1. $\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$
  2. $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{r}}$ (5.13)
  3. $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- **Changement de base :** (5.14)
  1. $\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\,\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$
  2. $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\,\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$
  3. $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$







- **Vecteur position :** où $\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \phi)$

$$\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (5.15)$$

- **Changement de base :**

1. $\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\,\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$
2. $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\,\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \qquad (5.14)$
3. $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\left(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)$

   $+\ \dot{\phi}\sin\theta\left(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right) = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$

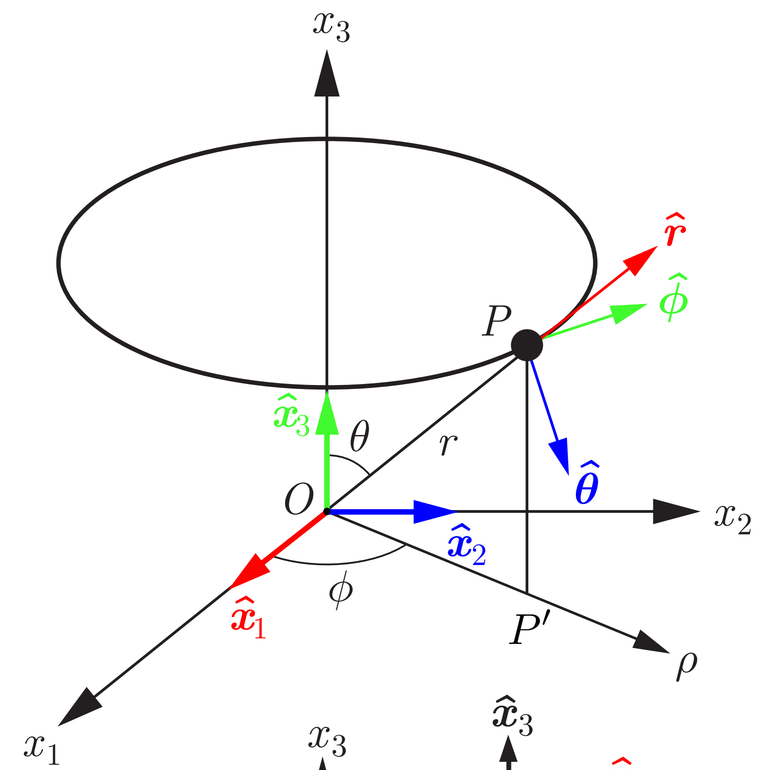
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\left(\sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) \qquad (5.16)$

   $+\ \dot{\phi}\cos\theta\left(-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right) = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$

3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right)$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

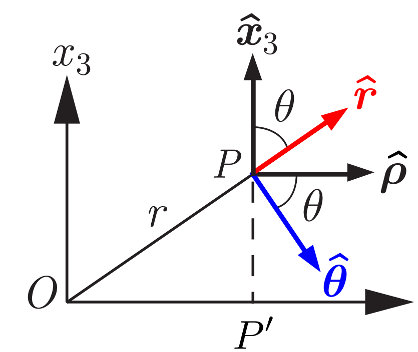
  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right)$



- **Identité vectorielle :**

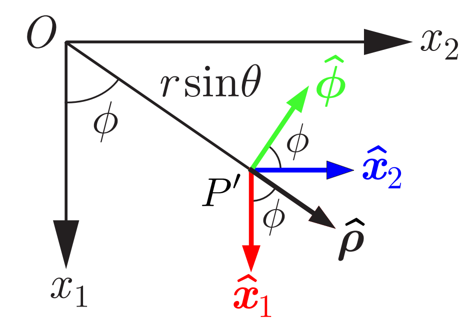
$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right) = -\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$= -\,\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$



- **Dérivées des vecteurs de base :**

  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.16)$
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$



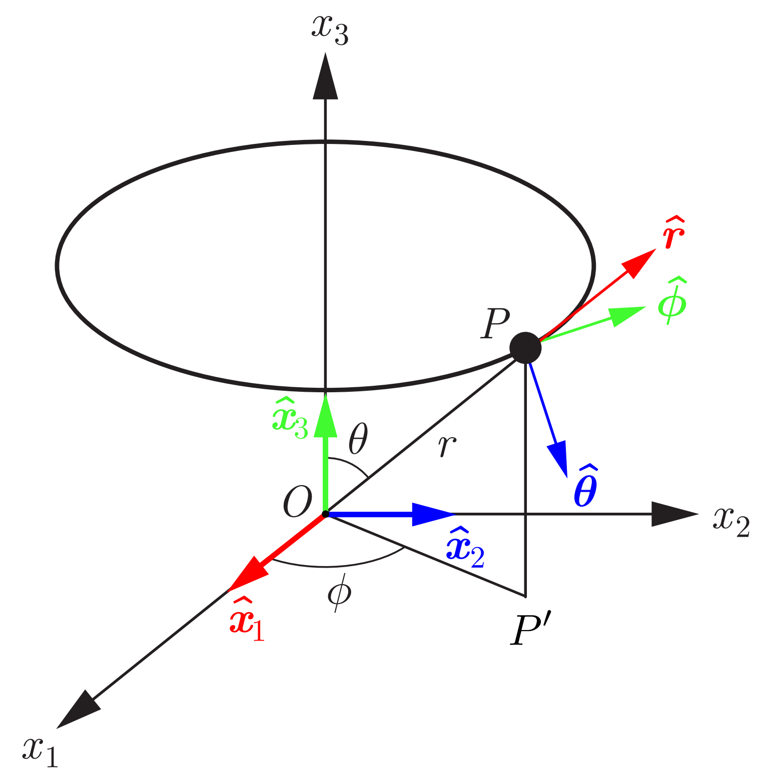
- **Vecteur position :**

$$\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{r}} \tag{5.15}$$

- **Dérivée du vecteur position :**

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{5.17}$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**



1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (5.16)
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

- **Vecteur vitesse :** (5.16) dans (5.17)

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}}}_{\text{radiale}} + \underbrace{r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{nodale}} + \underbrace{r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}_{\text{azimutale}} \tag{5.18}$$

- **Vecteur vitesse :**

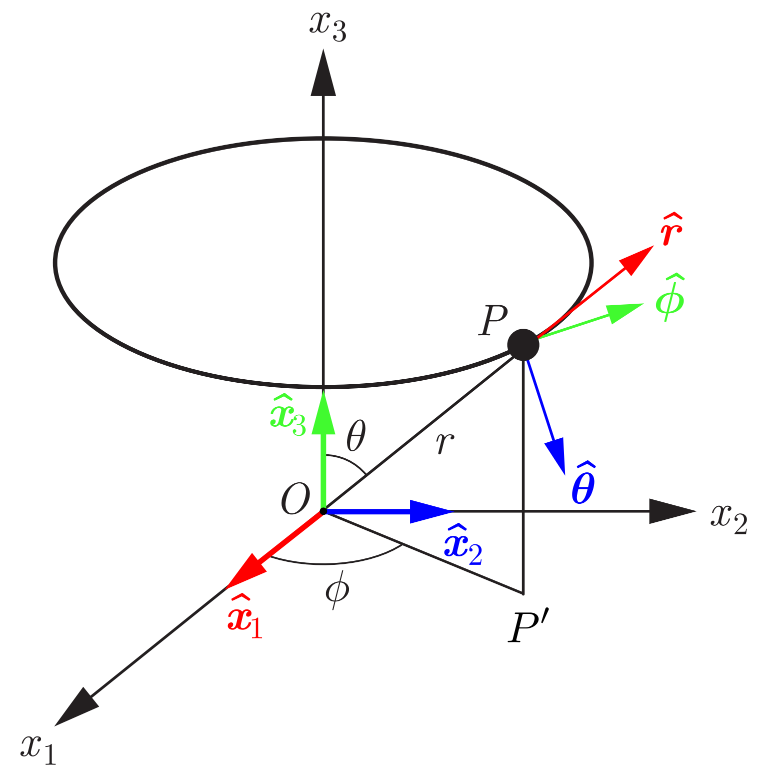
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.18)$$

- **Dérivée du vecteur vitesse :**

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} = {} & \ddot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\,\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ & + \left(\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta + r\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \qquad (5.19)\end{aligned}$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.16)$
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

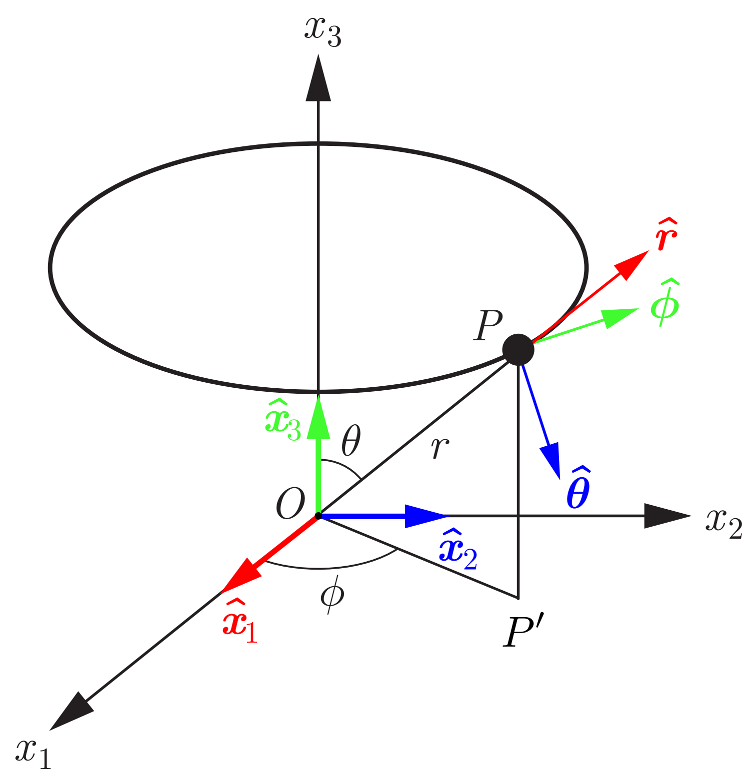


- **Dérivée du vecteur vitesse :**

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\,\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$
$$+ \left(\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta + r\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$+ r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \qquad (5.19)$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\qquad (5.16)$
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\,\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$



- **Accélération :** (5.16) dans (5.19)

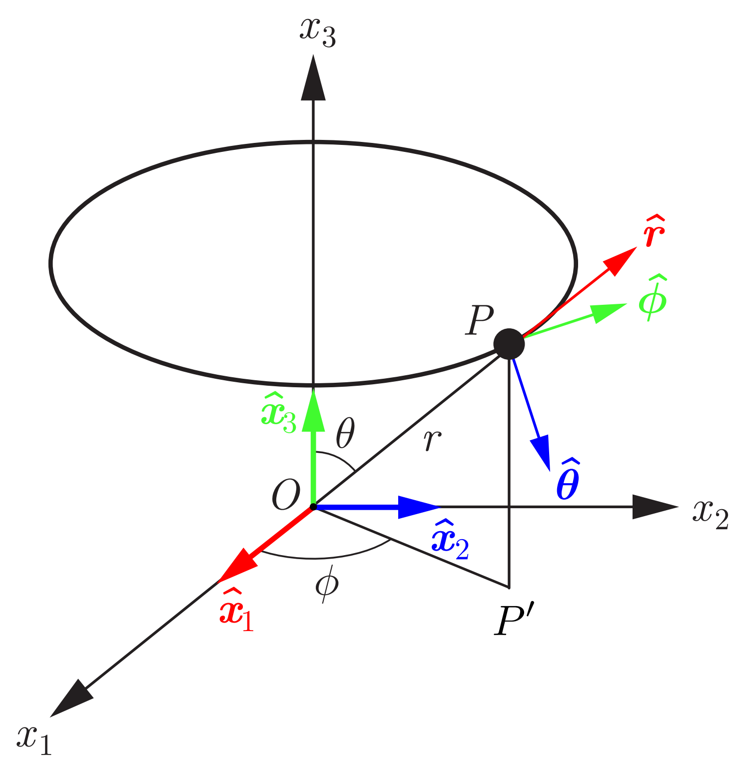
$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+ \left(r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.20)$$

- **Accélération :**

$$\boldsymbol{a} = \Big(\underbrace{\ddot{r}}_{\text{radiale}} \underbrace{- r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2 \sin^2\theta}_{\text{centripète}} \Big)\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$+ \Big(\underbrace{r\,\ddot{\theta}}_{\text{nodale}} + \underbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}_{\text{de Coriolis}} \underbrace{- r\,\dot{\phi}^2 \sin\theta\,\cos\theta}_{\text{centripète}} \Big)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$+ \Big(\underbrace{r\,\ddot{\phi}\,\sin\theta}_{\text{azimutale}} + \underbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta}_{\text{de Coriolis}} \Big)\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.20)$$



- **Repère direct mobile :** $(\hat{\boldsymbol{y}}_1,\,\hat{\boldsymbol{y}}_2,\,\hat{\boldsymbol{y}}_3)$

- **Vecteurs unitaires :**

$$\hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_i = 1 \qquad \forall \quad i = 1,2,3 \tag{5.21}$$

- **Dérivées temporelles des vecteurs unitaires :** (5.21)

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_i + \hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_i = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,3 \tag{5.22}$$

- **Dérivée comme combinaison linéaire :**

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\,\hat{\boldsymbol{y}}_j \qquad \text{où} \qquad \omega_{ii} = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,3 \tag{5.23}$$

- **Vecteurs orthonormaux :**

$$\hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k = \delta_{ik} \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3 \tag{5.24}$$

- **Dérivées temporelles des vecteurs orthonormaux :** (5.24)

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k + \hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_k = 0 \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3 \tag{5.25}$$

- **Dérivée comme combinaison linéaire :**

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\, \hat{\boldsymbol{y}}_j \qquad \text{où} \qquad \omega_{ii} = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,3 \tag{5.23}$$

- **Vecteurs orthonormaux :**

$$\hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k = \delta_{ik} \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3 \tag{5.24}$$

- **Dérivées temporelles des vecteurs orthonormaux :**

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k + \hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_k = 0 \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3 \tag{5.25}$$

- **Relation scalaire :** (5.23) dans (5.25)

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\, \hat{\boldsymbol{y}}_j \right) \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k + \hat{\boldsymbol{y}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_{kj}\, \hat{\boldsymbol{y}}_j \right) = 0 \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3$$

- **Relation d'antisymétrie :** (5.24) dans (5.26)

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad \omega_{ki} = -\,\omega_{ik} \qquad \forall \quad i,k = 1,2,3 \tag{5.27}$$

- **Application linéaire :** $(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3) \quad \rightarrow \quad (\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1, \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2, \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3)$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{y}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{y}}_3 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

- **Définition :** $\omega_1 \equiv \omega_{23} \quad ; \quad \omega_2 \equiv \omega_{31} \quad ; \quad \omega_3 \equiv \omega_{12}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2 \\ \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{y}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{y}}_3 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

- **Relations vectorielles :**

  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1 = \omega_3\, \hat{\boldsymbol{y}}_2 - \omega_2\, \hat{\boldsymbol{y}}_3$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2 = \omega_1\, \hat{\boldsymbol{y}}_3 - \omega_3\, \hat{\boldsymbol{y}}_1$ (5.30)
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3 = \omega_2\, \hat{\boldsymbol{y}}_1 - \omega_1\, \hat{\boldsymbol{y}}_2$

- **Relations vectorielles :** (5.31) "logo mercedes"

  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1 = \omega_1\, \cancel{\hat{\boldsymbol{y}}_1 \times \hat{\boldsymbol{y}}_1} + \omega_2\, \hat{\boldsymbol{y}}_2 \times \hat{\boldsymbol{y}}_1 + \omega_3\, \hat{\boldsymbol{y}}_3 \times \hat{\boldsymbol{y}}_1$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2 = \omega_1\, \hat{\boldsymbol{y}}_1 \times \hat{\boldsymbol{y}}_2 + \omega_2\, \cancel{\hat{\boldsymbol{y}}_2 \times \hat{\boldsymbol{y}}_2} + \omega_3\, \hat{\boldsymbol{y}}_3 \times \hat{\boldsymbol{y}}_2$
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3 = \omega_1\, \hat{\boldsymbol{y}}_1 \times \hat{\boldsymbol{y}}_3 + \omega_2\, \hat{\boldsymbol{y}}_2 \times \hat{\boldsymbol{y}}_3 + \omega_3\, \cancel{\hat{\boldsymbol{y}}_3 \times \hat{\boldsymbol{y}}_3}$

- **Vecteur vitesse angulaire :**

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\, \hat{\boldsymbol{y}}_1 + \omega_2\, \hat{\boldsymbol{y}}_2 + \omega_3\, \hat{\boldsymbol{y}}_3 \tag{5.32}$$

- **Relations vectorielles :** (5.31) et (5.32)

  1. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_1$
  2. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_2$ $\qquad (5.33)$
  3. $\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_3$

- **Formules de Poisson :**

$$\boxed{\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_i \qquad \forall \quad i = 1, 2, 3} \tag{5.34}$$

Siméon Poisson

$1781 - 1840$

- **Physique :** symétries fondamentales

1. **Renversement du temps :** réversibilité

$$t \;\rightarrow\; -t \tag{5.35}$$

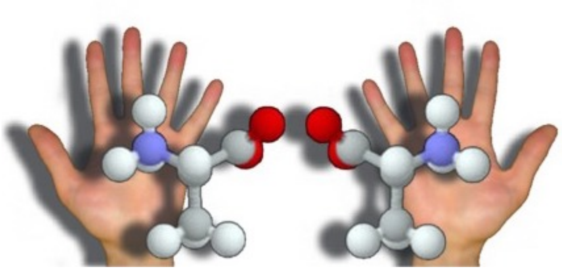
2. **Parité :** symétrie centrale

$$(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3) \;\rightarrow\; (-\hat{\boldsymbol{y}}_1, -\hat{\boldsymbol{y}}_2, -\hat{\boldsymbol{y}}_3) \tag{5.36}$$

3. **Conjugaison de charge :**

particule $\leftrightarrow$ antiparticule

$$q \;\rightarrow\; -q \tag{5.37}$$



Julian Schwinger
1918 – 1994

Théorème CPT : Schwinger - 1951

Les lois de la physique ne changent pas lorsque toutes les particules impliquées dans une interaction sont remplacées par leur antiparticule, les trois directions de l'espace sont inversées et le temps est inversé.

- **Parité :** application linéaire qui envoie les vecteurs de base d'un repère sur leur opposé

$$(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3) \quad \rightarrow \quad (-\hat{\boldsymbol{y}}_1, -\hat{\boldsymbol{y}}_2, -\hat{\boldsymbol{y}}_3) \tag{5.36}$$

- **Vecteur polaire :** vecteur qui change de signe par parité

1. **Position :** $\boldsymbol{r} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{r}$
2. **Vitesse :** $\boldsymbol{v} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{v}$
3. **Accélération :** $\boldsymbol{a} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{a}$ (5.38)
4. **Quantité de mouvement :** $\boldsymbol{p} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{p}$
5. **Force :** $\boldsymbol{F} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{F}$

- **Vecteur axial :** vecteur qui ne change pas de signe par parité

1. **Vitesse angulaire :** $\boldsymbol{\omega} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\omega}$
2. **Moment cinétique :** $\boldsymbol{L} \;\rightarrow\; \boldsymbol{L}$ (5.39)
3. **Moment de force :** $\boldsymbol{M} \;\rightarrow\; \boldsymbol{M}$

- **Produit vectoriel :** vecteurs polaire et axial

$$(\textbf{vecteur polaire}) \times (\textbf{vecteur polaire}) = \textbf{vecteur axial}$$

$$(\textbf{vecteur axial}) \times (\textbf{vecteur polaire}) = \textbf{vecteur polaire} \tag{5.40}$$

- **Invariance par parité :** pour montrer l'invariance de la mécanique classique par parité on considère un mouvement circulaire et on applique la parité par rapport au centre O.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \;\; \rightarrow \;\; -\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \;\; \rightarrow \;\; -\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})) \tag{5.41}$$

- **Démonstration graphique :** même mouvement (symétrie centrale)